۱۱. کاربرد مشتق

« ۱۱- کاربرد مشتق »

۱- طول نقطه‌ی عطف منحنی به معادله‌ی $y=\frac{x}{1+|x|}$ کدام است؟ (تجربی ۹۰)

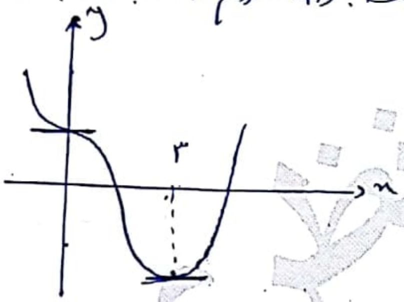
۱) -1 ۲) صفر ✓   ۳) 1 ۴) فاقد نقطه‌ی عطف

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{x+1} & x\geq 0\\ \frac{x}{1-x} & x<0\end{cases}\longrightarrow f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{(1+x)^2} & x>0\\ \frac{1}{(1-x)^2} & x<0\end{cases}\longrightarrow f''(x)=\begin{cases}\frac{-2}{(x+1)^3} & x>0\\ \frac{2}{(1-x)^3} & x<0\end{cases}$$

چون $f''_+(0)=-2$ و $f''_-(0)=2$ یعنی f'' در $x=0$ تغییر علامت می‌دهد، در نتیجه $x=0$ طول نقطه‌ی عطف f خواهد بود.

۲- شکل مقابل نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{1}{4}x^4+ax^3+bx^2+2$ است. $a+b$ کدام است؟ (تجربی ۹۰)

۱) -1 ۲) صفر   ۳) 1 ۴) 2



$$f'(x)=x^3+3ax^2+2bx \longrightarrow f'(3)=27+27a+6b=0$$

$$f''(x)=3x^2+6ax+2b \longrightarrow f''(0)=2b=0 \longrightarrow b=0$$

$$27+27a+0=0 \longrightarrow a=-1 \qquad a+b=-1$$

۳- منحنی نمایش تابع $y=-x^4+4x^3-3$، در کدام بازه صعودی و تقعر آن رو به پایین است؟ (تجربی ۹۱)

۱) $(2,3)$ ۲) $(0,2)$ ۳) $(0,3)$ ۴) $(2,+\infty)$

برای تشخیص اینکه تابع در چه بازه‌هایی صعودی و یا نزولی و تقعر آن رو به بالا یا رو به پایین است، مشتق اول و دوم آن را یافته، تعیین علامت می‌کنیم:

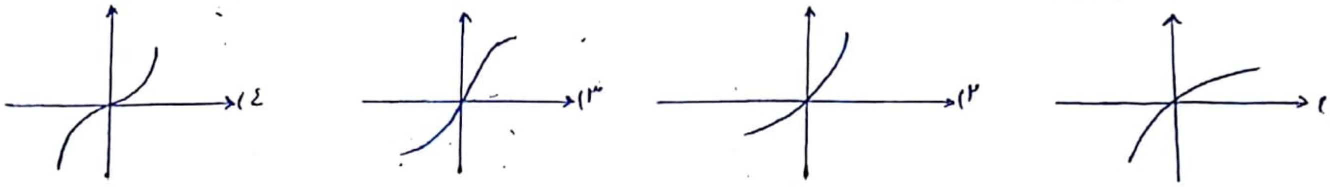
$$y=-x^4+4x^3-3 \longrightarrow y'=-4x^3+12x^2 \longrightarrow y'=4x^2(-x+3)$$

$$y'=-4x^3+12x^2 \longrightarrow y''=-12x^2+24x \longrightarrow y''=12x(-x+2)$$

x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$		$+$	0	$-$	
y''		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	
y		↗∩		↗∪		↗∩		↘∩	

با توجه به جدول تغییرات در بازه‌ی $(2,3)$ تابع صعودی و تقعر رو به پایین است.

۴ـ نمودار تابع $y=\frac{x^3}{x^2+1}$ در حوالی مبدأ مختصات چگونه است؟ (شهریور ۹۱)



$$y=\frac{x^3}{x^2+1} \longrightarrow y'=\frac{(x^3)'(x^2+1)-(x^2+1)'(x^3)}{(x^2+1)^2} \longrightarrow y'=\frac{3x^2(x^2+1)-2x(x^3)}{(x^2+1)^2} \longrightarrow y'=\frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)}$$

از ساده اخیر نتیجه می‌شود که مقدار مشتق تابع مورد نظر در $x=0$ برابر صفر است (خط مماس بر نمودار تابع در $x=0$ افقی است) که این شرط تنها در گزینه‌ی ۲ برقرار است.

۵ـ بیش‌ترین مقدار تابع $y=x^3-3x^2-9x+5$ در بازه‌ی $[-2,2]$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۷

ابتدا طول نقاط بحرانی تابع در بازه‌ی $(-2,2)$ مشخص می‌کنیم. داریم:

$$y=x^3-3x^2-9x+5 \longrightarrow y'=3x^2-6x-9=0 \longrightarrow \begin{cases} x=-1 \longrightarrow y(-1)=-1-3+9+5=10 \\ x=3 \notin (-2,2) \end{cases}$$

حال مقادیر تابع را در نقاط ابتدایی و انتهایی این بازه به دست می‌آوریم. داریم:

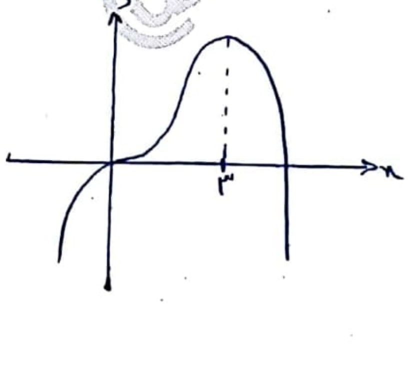
$y(-2)=-8-12+18+5=3$ $\quad y(2)=8-12+5=-17$

در آخر بین مقادیر به دست آمده بیش‌ترین مقدار را به عنوان ماکزیمم مطلق تابع در این بازه معرفی می‌کنیم:

y_{max} مطلق $=\max\{10, 3, -17\}=10$

۶ـ شکل روبه‌رو نمودار تابع $y=ax^4+2x^3+bx^2$ است. a کدام است؟

۱) -1 ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{4}$



از روی نمودار رسم شده نتیجه می‌گیریم:

۱) طول ماکزیمم نسبی تابع برابر $x=3$ است چون تابع همه‌جا مشتق‌پذیر است، پس به ازای $x=3$ مشتق اول تابع صفر می‌شود. داریم:

$$y=ax^4+2x^3+bx^2 \longrightarrow y'=4ax^3+6x^2+2bx \longrightarrow y'(3)=0 \longrightarrow 108a+54+6b=0 \xrightarrow{\div 6} 18a+b=-9$$

۲) طول نقطه‌ی عطف افقی تابع $x=0$ است، پس $x=0$ ریشه‌ی مضاعف مشتق اول (ریشه‌ی ساده‌ی مشتق دوم) تابع

است. داریم:

$$y'' = 12ax^3 + 12x + 2b \longrightarrow y''(0) = 0 \longrightarrow 2b = 0 \longrightarrow b = 0 \xrightarrow[b=0]{\text{جایگذاری در معادله (1)}} 18a = -9 \qquad a = -\frac{1}{2}$$

۷- تقعر منحنی به معادله‌ی $y = x\sqrt{x^2+2}$ در بازه‌ی $(a, +\infty)$ رو به بالاست. کم‌ترین مقدار a کدام است؟ (تجربی ۹۲)

۱) صفر ۲) -1 ۳) 1 ۴) $-\infty$

در بازه‌ای تقعر رو به بالاست که در آن بازه علامت مشتق دوم تابع مثبت باشد. پس داریم:

$$y = x\sqrt{x^2+2} \longrightarrow y' = 1 \times \sqrt{x^2+2} + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+2}} \times x \longrightarrow y'' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+2}} + \frac{2x\sqrt{x^2+2} - \frac{2x}{2\sqrt{x^2+2}} \times x}{x^2+2}$$

$$y'' = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} + \frac{2x(x^2+2) - x^3}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}} = \frac{\overbrace{x(x^2+2)}^{x^3+2x} + 2x(x^2+2) - \cancel{x^3}}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}} = \frac{2x + 2x(x^2+2)}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}$$

$$y'' > 0 \longrightarrow \frac{2x\overbrace{(1+(x^2+2))}^{\text{همواره مثبت}}}{\underbrace{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}_{\text{همواره مثبت}}} > 0 \qquad 2x > 0 \qquad x > 0$$

پس تابع در بازه‌ی $(0, +\infty)$ تقعرش رو به بالاست. بنابراین کم‌ترین مقدار a برابر صفر است.

۸- در کدام بازه تابع با ضابطه $f(x) = -x^4 + 8x^3 - 18x^2$ نزولی و تقعر نمودار رو به بالاست؟ (تجربی ۹۳)

۱) $(1,3)$ ۲) $(1,4)$ ۳) $(0,1)$ ۴) $(0,3)$

برای آنکه تابع نزولی و تقعر آن رو به بالا باشد باید علامت مشتق اول و دوم این تابع به ترتیب منفی و مثبت باشد. پس داریم:

$$f'(x) = -4x^3 + 24x^2 - 36x \longrightarrow f''(x) = -12x^2 + 48x - 36$$

تابع نزولی است $\rightarrow f'(x) < 0 \longrightarrow -4x^3 + 24x^2 - 36x < 0 \longrightarrow -4x(x^2 - 6x + 9) < 0$

$$\longrightarrow -4x\underbrace{(x-3)^2}_{\text{همواره نامنفی}} < 0 \longrightarrow -4x < 0 \qquad x > 0$$

تقعر تابع رو به بالاست $\longrightarrow f''(x) > 0 \longrightarrow -12x^2 + 48x - 36 > 0 \longrightarrow -12(x^2 - 4x + 3) > 0$

$$\longrightarrow x^2 - 4x + 3 < 0 \longrightarrow 1 < x < 3$$

۹- اگر تابع‌هایی به صورت $f(x) = x^3 - (m+2)x^2 + 3x$ همواره صعودی باشند، آنگاه مجموعه طول نقاط عطف این توابع در کدام بازه است؟ (تجربی ۹۴)

۱) $[-2,0]$ ۲) $[-2,2]$ ۳) $[-1,1]$ ۴) $[0,1]$

مشتق تابع باید همواره نامثبت باشد.

$f'(x)=3x^2-2(m+2)x+3 \leq 0 \longrightarrow \Delta \leq 0 \longrightarrow (-2(m+2))^2-4(3)(3) \leq 0 \rightarrow$

$4(m+2)^2-36 \leq 0 \longrightarrow (m+2)^2 \leq 9 \longrightarrow -3 \leq m+2 \leq 3$

طول نقاط عطف: $f''(x)=0 \longrightarrow 6x-2(m+2)=0$ $\quad x_{\text{عطف}}=\frac{m+2}{3} \longrightarrow -1 \leq x_{\text{عطف}} \leq 1$

۱۰- مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع با ضابطه $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-15x$ در بازه $[-4,3]$ کدام است؟

۱) $24, -18$ ۲) $27, -45$ ✓ ۳) $27, -36$ ۴) $36, -27$

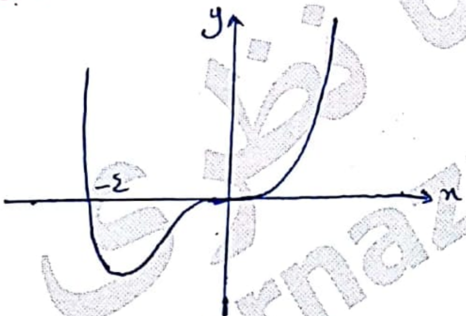
$f'(x)=x^2-2x-15=0 \rightarrow (x-5)(x+3)=0 \longrightarrow x=-3, \cancel{5}$

$\underbrace{f(3)=9-9-45=-45}_{max}$ $\quad \underbrace{f(-3)=-9-9+45=27}_{min}$

لازم نیست $f(-4)$ را حساب کنیم چون به صورت کسری می‌شود، چون در گزینه‌ها کسر نداریم.

۱۱- شکل روبرو نمودار تابع $f(x)=x^4+ax^3+bx$ است. با تعیین مقادیر a و b مینیمم تابع کدام است؟

(تجربی ۹۵) ۱) -36 ۲) -32 ۳) -27 ✓ ۴) -24



$f'(0)=f''(0)$

در صفر مماس افقی داریم پس باید:

$f'(x)=4x^3+3ax^2+b\Big|_{x=0}=0 \qquad b=0$

$f(-4)=0 \rightarrow (-4)^4+a(-4)^3=0 \qquad a=\frac{4^4}{4^3}=4$

$f(x)=x^4+4x^3 \longrightarrow f'(x)=4x^3+12x^2=0 \longrightarrow$

$4x^2(x+3)=0 \longrightarrow x=-3$

$f(-3)=(-3)^4+4(-3)^3=81-108=-27$

۱۲- طول نقطه‌ی عطف نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{(2-x)^2}{x}$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۰)

۱) -1 ۲) صفر ۳) 1 ۴) فاقد نقطه‌ی عطف ✓

$f(x)=\frac{(2-x)^2}{x} \rightarrow f(x)=\frac{4-4x+x^2}{x} \rightarrow f(x)=\frac{4}{x}-4+x \rightarrow f'(x)=\frac{-4}{x^2}+1$

$f''(x)=\frac{8}{x^3}$

عبارت $f''(x)=\frac{8}{x^3}$ در $x=0$ تغییر علامت می‌دهد اما توجه کنید که تابع f در نقطه‌ی $x=0$ تعریف نشده است.

۱۳- منحنی نمایش تابع $y=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x$ در کدام بازه نزولی و تقعر آن رو به بالا است؟ (تجربی خارج ۹۱)

۱) $(-1,1)$ ۲) $(-1,3)$ ۳) $(1,3)$ ✓ ۴) $(1,+\infty)$

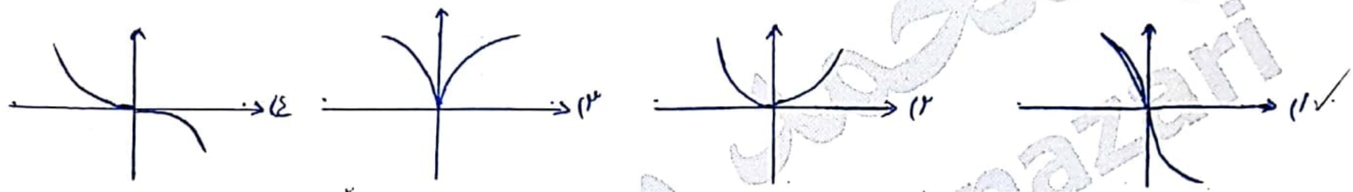
تابع پیوسته‌ی f در بازه‌ای نزولی است که مشتق اول تابع f کوچکتر از صفر باشد و تقعرش در بازه‌ای رو به بالاست که مشتق دوم آن تابع f بزرگتر از صفر باشد. داریم: $y=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x \to y'=x^2-2x-3 \to y''=2x-2$

$y'<0 \to x^2-2x-3<0 \to -1<x<3$ (1) تابع نزولی است

$y''>0 \to 2x-2>0 \to x>1$ (2) تقعر رو به بالا است

$\xrightarrow{(1)\cap(2)} 1<x<3$

۱۴- نمودار تابع $y=x^{\frac{8}{5}}-4x^{\frac{3}{5}}$ در حوالی مبدأ مختصات چگونه است؟ (تجربی خارج ۹۱)



$y'=\frac{8}{5}x^{\frac{3}{5}}-\frac{12}{5}x^{-\frac{2}{5}}=\frac{4}{5}\left(2\sqrt[5]{x^3}-\frac{3}{\sqrt[5]{x^2}}\right)=\frac{4}{5}\left(\frac{2\sqrt[5]{x^5}-3}{\sqrt[5]{x^2}}\right)=\frac{4}{5}\left(\frac{2x-3}{\sqrt[5]{x^2}}\right)$

همانطور که دیده می‌شود $x=0$ ریشه‌ی مضاعف مخرج y' است. پس علامت مشتق در دو طرف این نقطه تغییر نکرده است پس تابع در اطراف این نقطه صعودی است یا نزولی. برای پی بردن به این موضوع داریم: تابع در حوالی $x=0$ نزولی است

$y'(0)=\frac{4}{5}\left(\frac{-3}{0^+}\right)=-\infty$

از طرفی چون شیب مماس $-\infty$ است، در نتیجه نمودار تابع در حوالی $x=0$ به شکل روبرو است:

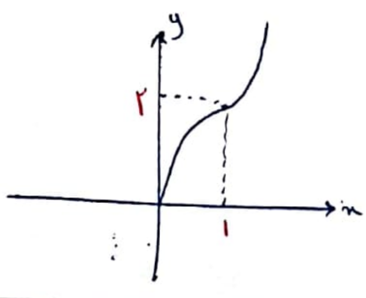
$f'(0)=-\infty$

۱۵- کم‌ترین مقدار تابع $y=\frac{1}{4}x^4-x^3-2x^2$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۲)

۱) -36 ۲) -32 ✓ ۳) -24 ۴) -18

$y=\frac{1}{4}x^4-x^3-2x^2 \to y'=x^3-3x^2-4x=0 \to y'=x(x^2-3x-4)=0 \to x=0, x=-1, x=4$

$x=0\to y=0$, $x=-1\to y=\frac{1}{4}+1-2\to y=-\frac{3}{4}$, $x=4\to y=64-64-32\to y_{min}=-32$



۱۶- شکل روبرو نمودار تابع $y=ax^{\frac{3}{2}}+bx^{\frac{1}{2}}$ است. b کدام است؟

(تجربی خارج ۹۲)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) 1 ۳) $\frac{3}{2}$ ✓ ۴) 2

$y=ax^{\frac{3}{2}}+bx^{\frac{1}{2}} \longrightarrow y(1)=2 \longrightarrow a+b=2$; $y'=\frac{3}{2}ax^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}bx^{-\frac{1}{2}}$

$y''=\frac{3}{4}ax^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{4}bx^{-\frac{3}{2}}$ $\quad y''(1)=0 \longrightarrow \frac{3}{4}a-\frac{1}{4}b=0 \longrightarrow 3a=b \xrightarrow{(1)}$

$4a=2 \longrightarrow a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{3}{2}$

۱۷- تقعر نمودار تابع $y=(x+3)\sqrt{x}$ در بازه‌ی (a,b) رو به پایین است. بیش‌ترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) صفر $\quad$ ۲) -1 $\quad$ ۳) 1 ✓ $\quad$ ۴) $-\infty$ $\quad$ (تجربه خارج ۹۲)

$y=(x+3)\sqrt{x}=x^{\frac{3}{2}}+3x^{\frac{1}{2}} \longrightarrow y'=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}+\frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}} \longrightarrow y''=\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}}-\frac{3}{4}x^{-\frac{3}{2}}=$

$\frac{3}{4}x^{-\frac{3}{2}}(x-1)=\frac{3(x-1)}{4x\sqrt{x}}$

دامنه‌ی تابع $(0,+\infty)$ است. با توجه به اینکه مخرج مشتق دوم همواره مثبت است و صورت آن به ازای $0<x<1$ منفی است

پس بازه‌ی مورد نظر $(0,1)$ است و داریم: $b-a=1-0=1$

۱۸- در کدام بازه، تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^3-3x^2$ صعودی و تقعر نمودار رو به پایین است؟ (تجربه خارج ۹۳)

۱) $(-2,0)$ ✓ $\quad$ ۲) $(-2,1)$ $\quad$ ۳) $(-1,2)$ $\quad$ ۴) $(0,1)$

باید مشتق اول و دوم به ترتیب مثبت و منفی باشد:

$f'(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-6x \longrightarrow f''(x)=3x^2+3x-6$

تابع صعودی است $\longrightarrow f'(x)>0 \longrightarrow x^3+\frac{3}{2}x^2-6x>0 \longrightarrow x(\underbrace{x^2+\frac{3}{2}x-6}_{\text{ریشه‌ها}})>0$

$x=\frac{-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{105}{4}}}{2}$ → $x=-3/\ldots$ ، $x=1/\ldots$

x	$-\infty$		$-3/\ldots$		0		$1/\ldots$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↘		↗		↘		↗	

$\longrightarrow -3/\ldots<x<0$ یا $x>1/\ldots$ (1)

تقعر رو به پایین $\longrightarrow f''(x)=3x^2+3x-6<0 \longrightarrow 3(x^2+x-2)<0 \longrightarrow -2<x<1$ (2)

$\xrightarrow{(1)\cap(2)} -2<x<0$

۱۹- اگر تابع هایی بصورت $f(x)=\frac{2}{3}x^3-(m-1)x^2+8x$ دارای ماکزیمم و مینیمم با طول های منفی باشند. آنگاه مجموعه طول نقاط عطف این توابع در کدام بازه است؟ (تجربی خارج ۹۴)

۱) $(-5,-\frac{1}{2})$ ۲) $(-4,-1)$ ۳) $(-\infty,-2)$ ✓ ۴) $(-\infty,-4)$

$y=\frac{2}{3}x^3-(m-1)x^2+8x \longrightarrow y'=2x^2-2(m-1)x+8$

ریشه های این معادله درجه دوم طول نقاط ماکزیمم و مینیمم تابع اند و چون طول ماکزیمم و مینیمم منفی است این معادله باید دارای ۲ ریشه متمایز منفی باشد. بنابراین در این معادله باید $\Delta>0$ و مجموع ریشه ها منفی و ضرب ریشه ها مثبت باشد، داریم:

$\Delta=4(m-1)^2-64>0 \longrightarrow m<-3$ یا $m>5$

جمع ریشه ها: $\frac{2(m-1)}{2}<0$ و لذا $m-1<0$

اشتراک این مجموعه جواب ها محدوده m را مشخص می کند. بنابراین محدوده m به صورت $m<-3$ است.

اما طول نقطه عطف این توابع ریشه مشتق دوم تابع است. بنابراین: $y''=4x-2m+2=0 \longrightarrow x=\frac{m-1}{2}$

بنابراین داریم: $m<-3 \longrightarrow m-1<-4 \longrightarrow x=\frac{m-1}{2}<-2$

۲۰- اگر $A(1,11)$ نقطه عطف نمودار تابع با ضابطه $f(x)=x^3+ax^2+bx$ باشد، آنگاه مقدار $f(-1)$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۵)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ✓ ۴) ۶

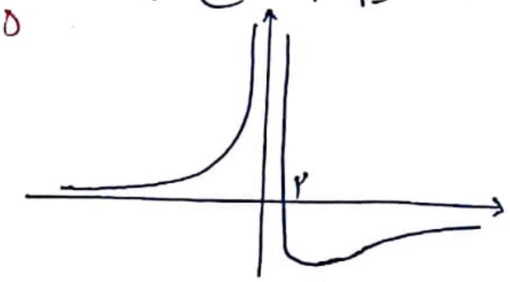
باید $f(1)=11$, $f''(1)=0$

$f'(x)=3x^2+2ax+b$, $f''(x)=6x+2a=0 \longrightarrow 6(1)+2a=0$

$a=-3$, $f(1)=1^3-3(1)^2+b(1)=-11 \longrightarrow b=-9 \longrightarrow f(x)=x^3-3x^2-9x \longrightarrow$

$f(-1)=(-1)^3-3(-1)^2-9(-1)=5$

۲۱- شکل روبرو نمودار تابع $f(x)=\frac{ax+2}{x^2+b}$ است. با تعیین a و b مینیمم نسبی این تابع کدام است؟ تجربی خارج ۹۵



۱) $-\frac{1}{8}$ ✓ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $-\frac{3}{8}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

$x=0$ مجانب قائم است. پس ریشه مخرج صفر است، یعنی $b=0$

$f(2)=0 \longrightarrow \frac{a(2)+2}{2^2}=0 \longrightarrow a=-1 \longrightarrow f(x)=\frac{-x+2}{x^2}$

$f'(x)=\frac{-x^2-2x(-x+2)}{x^4}=\frac{x^2-4x}{x^4}=0 \longrightarrow x=0, 4$; $f(4)=\frac{-4+2}{4^2}=\frac{-2}{16}=\frac{-1}{8}$